

**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
ФГБОУ ВПО «БРЯНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

**КАФЕДРА МЕХАНИКИ И ОСНОВ КОНСТРУИРОВАНИЯ**

**РАСЧЕТ ПЛОСКОНАПРЯЖЕННОЙ  
ПЛАСТИНЫ  
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Методические указания к факультативным занятиям  
по дисциплине «Сопротивление материалов»

**Брянск 2012**

УДК 624.04

ББК

С

Старовойтов, С.И. Расчет плосконапряженной пластины методом конечных элементов: Методические указания к факультативным занятиям / С.И.Старовойтов, А.П. Карпович, Н.Н.Чемисов. -Брянск: Издательство Брянской ГСХА, 2012 – 41 с.

Методические указания разработаны по направлению подготовки 110800 Агроинженерия (квалификация «бакалавр»). В работе рассматриваются основные этапы определения напряженного состояния элементарных составляющих плосконапряженной пластины.

Рецензент: к.т.н., доцент кафедры М и ОК Романеев Н.А.

Рекомендовано к изданию методической комиссией инженерно-технологического факультета, протокол №1 от 2012 г.

© Брянская ГСХА, 2012  
© Старовойтов С.И., 2012  
© Карпович А.П., 2012

Метод конечных элементов – метод, позволяющий численно получить величины нормальных и касательных напряжений в любой точке исследуемой детали как на плоскости, так и в пространстве. В основе метода конечных элементов лежат такие предметы как сопротивление материалов, теория упругости.

Основываясь на законах сопротивления материалов, метод конечных элементов, как частный случай, включает уравнения равновесия, геометрические и физические уравнения элементарных составляющих.

Используя указанные выше уравнения, составляется глобальная матрица жесткости для детали в целом. Нагрузка представлена в виде грузового столбца глобальной матрицы, связывающей все силы с независимыми силами.

Последующее решение системы линейных уравнений с помощью пакета Labview представлено в виде вектора перемещений узловых точек. Вектор перемещения узловых точек позволяет рассчитать независимые силы, действующие на элементарный фрагмент, а в дальнейшем, величины нормальных и касательных напряжений.

Наличие величин нормальных и касательных напряжений позволит определить через величины главных напряжений накопленную величину потенциальной энергии и направление главных напряжений. Последнее, применительно к почве, позволяет определить угол ее скалывания.

## 1. Перемещения узловых точек

Зарисуем прямоугольный элемент почвенного массива (рис.1). Введем систему координат  $YOX$ .

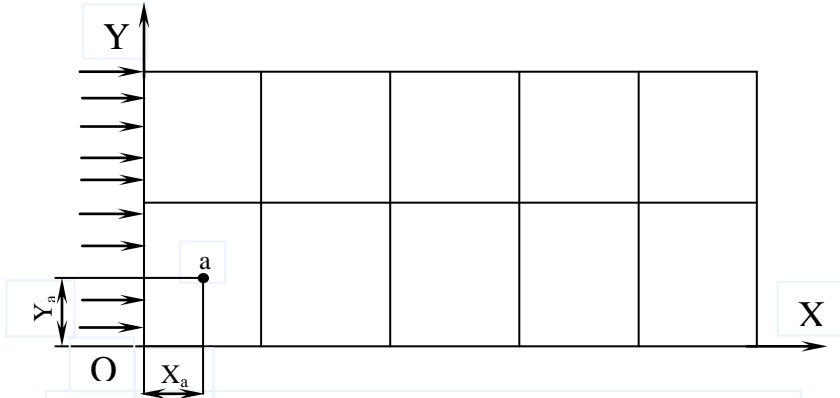


Рисунок 1 - Плосконапряженное состояние элемента

Данный прямоугольный элемент находится в плосконапряженном состоянии. Перемещение любой точки прямоугольного элемента будет связано с осями  $Y$  и  $X$ . Например, точка  $a$  имеет координаты  $(X_a; Y_a)$ . Представим себя прямоугольный элемент, изображенный на рис.1, в виде набора треугольников (рис.2).

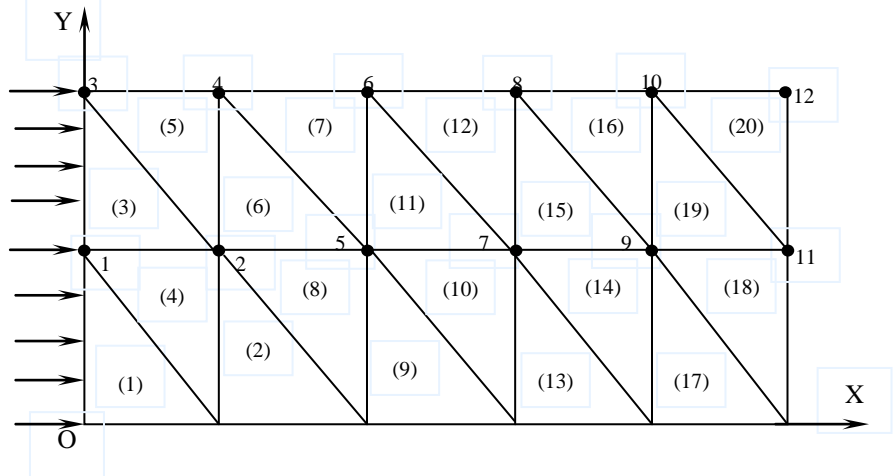


Рисунок 2 - Прямоугольный элемент в виде набора треугольников

Нагрузка приходится на одну из сторон двух треугольников. Цифры в скобках, размещенные внутри треугольника, представляют собой номера треугольников. Жирной точкой выделены узловые точки, с помощью которых треугольники связаны между собой. Цифры около узловых точек нумеруют узловые точки (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12). Таким образом, имеется 12 узловых точек и 20 составляющих треугольников.

Под действием рассредоточенной нагрузки, приложенной к одной из сторон 1 и 3 элемента, узловые точки смещаются. Горизонтальное перемещение (в направлении оси X) обозначается символом  $u$ , вертикальное перемещение (в направлении оси Y) обозначается символом  $v$ .

Перемещения всех узловых точек вектором

$$\bar{z} = [u_1, v_1, \dots, u_{11}, v_{11}]^T. \quad (1)$$

Символ T обозначает операцию «транспонирование».

## 2. Уравнения равновесия

Выделим элемент №3, на который действует нормальное и касательное напряжение (рис.3).

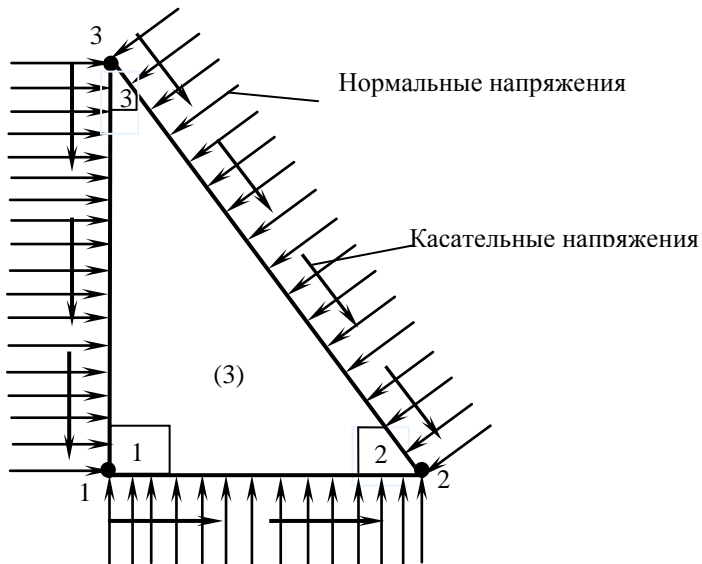


Рисунок 3 - Действие касательных и нормальных напряжений на элемент №3

Касательные напряжения действуют параллельно поверхности элемента №3, нормальные – перпендикулярно поверхности элемента №3. Касательные и нормальные напряжения заменены равнодействующими силами, действующими в узловых точках 1, 2, 3 (рис.4).

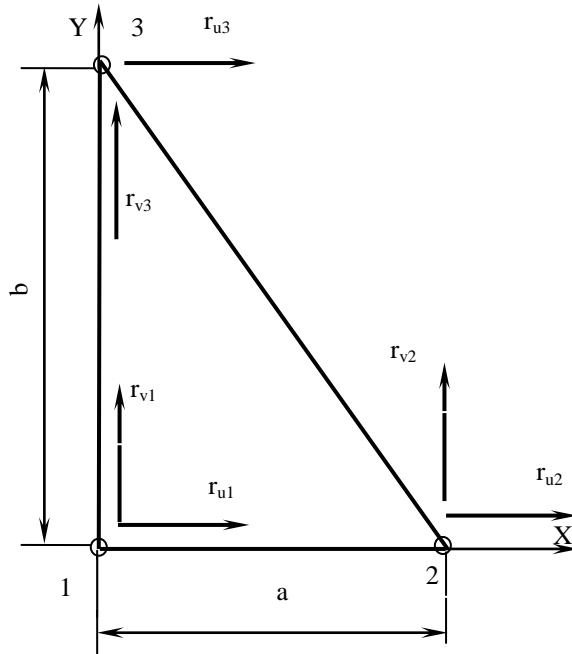


Рисунок 4 - Действие равнодействующих сил на узловые точки

Равнодействующие силы, приложенные в узловых точках 1, 2, 3 представлены вектором

$$\vec{r} = [r_{u1}, r_{v1}; r_{u2}, r_{v2}; r_{u3}, r_{v3}] \vec{r}. \quad (2)$$

Составим уравнения равновесия

$$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum M_1 = 0.$$

Имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{u1} + r_{u2} + r_{u3} = 0; \\ r_{v1} + r_{v2} + r_{v3} = 0; \\ r_{v2} \times a - r_{u3} \times b = 0 \end{array} \right\}. \quad (3)$$

Здесь принято следующее правило знаков. По часовой стрелке “-”, против часовой стрелке - “+”. Таким образом, на треугольный элемент действует 6 сил, которые связаны между собой только тремя уравнениями равновесия. С учетом этого, система относится к статически неопределимой. При наличии трех уравнений равновесия независимыми (исходными) будут три силы. В качестве исходных сил взяты следующие силы:  $r_{u2}, r_{u3}, r_{v3}$ .

Вектор независимых сил обозначается следующим образом:

$$\bar{s} = [r_{u2}, r_{u3}, r_{v3}]^T. \quad (4)$$

Остальные силы  $\bar{F}$  выражаются через вектор независимых сил  $\bar{s}$ , используя уравнение (3).

$$\begin{aligned} r_{v2} \times a - r_{u3} \times b &= 0; \\ r_{v2} \times a &= r_{u3} \times b; \\ r_{v2} &= \frac{r_{u3} \times b}{a}. \end{aligned}$$

Преобразуем полученное выражение, используя подстановку

$$\beta = \frac{b}{a}.$$

Имеем

$$r_{v2} = \beta \times r_{u3}.$$

Далее

$$r_{v1} = -r_{v2} - r_{v3}.$$

Или же

$$\begin{aligned} r_{v1} &= -\beta r_u - r_{v3}. \\ r_{u1} &= -r_{u2} - r_{u3}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} r_{u1} &= -r_{u2} - r_{u3}; \\ r_{v1} &= -r_{u3} \times \beta - r_{v3}; \\ r_{v2} &= r_{u3} \times \beta. \end{aligned} \quad (5)$$

Запишем связь между вектором всех сил  $\bar{r}$  и вектором независимых сил  $\bar{s}$ , используя выражение (5).

$$\begin{bmatrix} r_{u1} \\ r_{v1} \\ r_{u2} \\ r_{v2} \\ r_{u3} \\ r_{v3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -\beta & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{u2} \\ r_{u3} \\ r_{v3} \end{bmatrix}.$$

В общей форме силы, действующие на узловые точки элемента (3), связаны с независимыми исходными силами следующим уравнением

$$\bar{r} = a \times \bar{s}, \quad (6)$$

где  $a$  – матрица, равная

$$a = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Данная матрица устанавливает связь между независимыми силами  $\vec{S}$  и остальными силами  $\vec{r}$ .

#### 4. Геометрические уравнения

Работа всех сил при статическом нагружении равна половине произведения всех сил на все перемещения.

$$A = \frac{1}{2} \vec{r}^T \times \vec{z}, \quad (7)$$

где  $\vec{z}$  – перемещения всех узловых точек.

Также работа равна половине произведения независимых сил на перемещения от этих независимых сил

$$A = \frac{1}{2} \times \vec{s}^T \times \vec{\Delta}, \quad (8)$$

где  $\vec{\Delta}$  – вектор независимых сил (рис.7).

Вектор независимых перемещений имеет следующую форму

$$\vec{\Delta} = (u_2; u_3; v_3). \quad (9)$$

С учетом равенства работ всех сил  $\vec{r}$  и независимых сил  $\vec{S}$

$$\frac{1}{2} \times \vec{r}^T \times \vec{z} = \frac{1}{2} \times \vec{s}^T \times \vec{\Delta}.$$

Тогда

$$\vec{r}^T \times \vec{z} = \vec{s}^T \times \vec{\Delta}.$$

$$\vec{\Delta} = \frac{\vec{r}^T \times \vec{z}}{\vec{s}^T}.$$

Вводим подстановку

$$\frac{\vec{r}^T}{\vec{s}^T} = \vec{a}^T.$$

Тогда геометрические уравнения представлены в форме

$$\bar{\Delta} = a^T \times \bar{z}. \quad (10)$$

#### 4. Физические уравнения

Физические уравнения связывают усилия, деформации и перемещения. Составим физические уравнения. Запишем связь между усилиями, деформациями, перемещениями.

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{u2,u2} & \delta_{u2,u3} & \delta_{u2,v3} \\ \delta_{u3,u2} & \delta_{u3,u3} & \delta_{u3,v3} \\ \delta_{v3,u2} & \delta_{v3,u3} & \delta_{v3,v3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{u2} \\ r_{u3} \\ r_{v3} \end{bmatrix}.$$

Первой строкой матрицы является перемещение второй узловой точки в направлении оси X от действия единичных сил  $\begin{bmatrix} r_{u2}, r_{u3}, r_{v3} \end{bmatrix}$ . Второй строкой матрицы является перемещение 3 узловой точки в направлении оси X от действия единичных сил  $\begin{bmatrix} r_{u2}, r_{u3}, r_{v3} \end{bmatrix}$ . Третьей строкой матрицы является перемещение 3 узловой точки в направлении оси Y от действия единичных сил  $\begin{bmatrix} r_{u2}, r_{u3}, r_{v3} \end{bmatrix}$ .

Обозначим промежуточную матрицу через  $b$ .

$$b = \begin{bmatrix} \delta_{u2,u2} & \delta_{u2,u3} & \delta_{u2,v3} \\ \delta_{u3,u2} & \delta_{u3,u3} & \delta_{u3,v3} \\ \delta_{v3,u2} & \delta_{v3,u3} & \delta_{v3,v3} \end{bmatrix}.$$

Тогда имеем

$$\bar{\Delta} = b \times \bar{s}. \quad (11)$$

Под действием силы  $r_{u2}$ , приложенной ко 2 узлу в направлении оси X, произошла деформация узловых точек 2 и 3 (рис.5).

Деформация  $\delta$  соотносена к абсолютному удлинению  $\Delta l$ , которое равно

$$\Delta l = \frac{P \times l}{E \times F},$$

где  $\Delta l$  – абсолютное удлинение, м;

$P$  – сила растяжения, Н;

$l$  – длина образца, м;

$F$  – площадь рассредоточения нагрузки,  $\text{м}^2$ ;  
 $E$  – модуль упругости материала,  $\text{Н/м}^2$ .

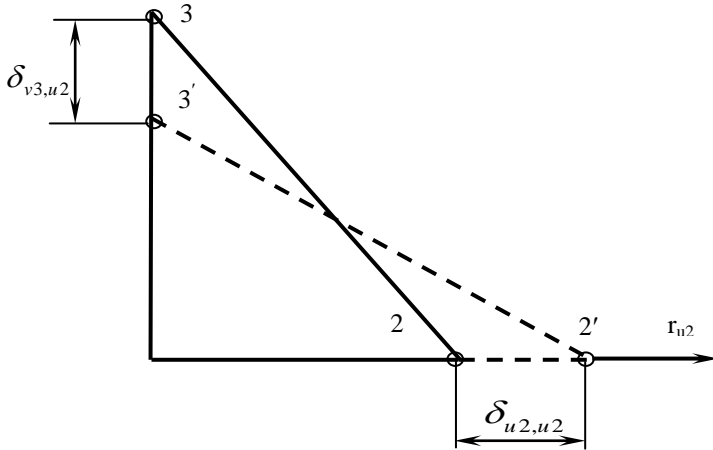


Рисунок 5-Деформация узла 2 и 3 от действия силы  $P_{u2}$

Материал представлен модулем упругости  $E$ . Длина  $l$  соответствует размеру  $b$ . Площадь  $F$  равна

$$F = b \times \delta,$$

где  $\delta$  – толщина пластины.

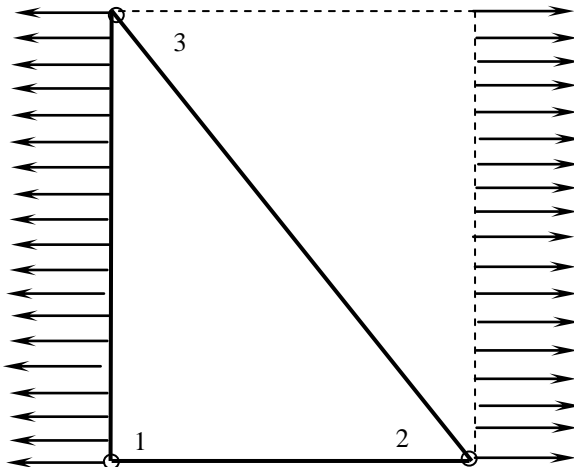


Рисунок 6 - Дополненный <sup>11</sup>треугольный элемент

Так как рассредоточенные силы действуют в двух направлениях, их заменяем двумя единичными силами. Таким образом, имеем  $P = 2H$  (две единичные силы).

Тогда

$$\delta_{u2,u2} = \frac{2 \times a}{E \times \delta \times b}.$$

Преобразуем полученное выражение, используя параметр  $\beta = \frac{b}{a}$ .

Имеем

$$\delta_{u2,u2} = \frac{2 \times \beta^{-1}}{E \times \delta}. \quad (12)$$

Деформация

$$\delta_{v3,u2} = -\varepsilon_y \times b,$$

где  $\varepsilon_y$  – относительное укорочение в направлении оси Y.

Знак “-” указывает на то, что это укорочение.

В тоже время

$$\varepsilon_y = \mu \times \varepsilon_x,$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона. Данный коэффициент учитывает взаимосвязь между поперечной и продольной относительной деформацией.

Продольная относительная деформация

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_{u2,u2}}{a}.$$

Таким образом

$$\varepsilon_y = \frac{\mu \times \delta_{u2,u2}}{a}.$$

И

$$\varepsilon_y = \frac{2 \times \beta^{-1} \times \mu}{E \times \delta \times a}.$$

Имеем следующее:

$$\delta_{v3,u2} = -\frac{2 \times \beta^{-1} \times \mu}{E \times \delta \times \beta^{-1}} = -\frac{2 \times \mu}{E \times \delta}.$$

$$\delta_{v3,u2} = -\frac{2 \times \mu}{E \times \delta}. \quad (13)$$

Определим деформацию  $\delta_{u3,u3}$  (рис. 7).

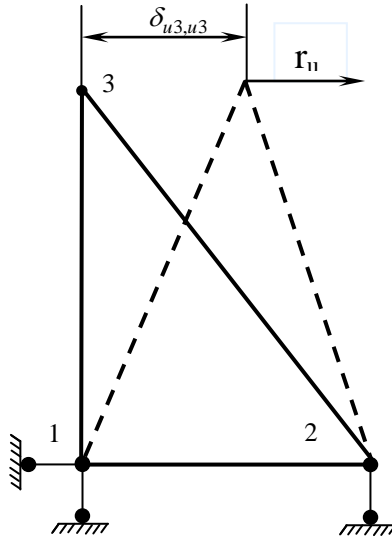


Рисунок 7 - К определению деформации 3 узловой точки от силы  $F_{u3}$

Зарисуем треугольник (рис. 8). Дорисовываем его до прямоугольника штриховой линией. Обозначаем касательное напряжение. В условиях сдвига действует только касательное напряжение. Действующее касательное напряжение заменено единичными силами.

Деформацию узла 3 определим из выражения

$$\delta_{из,из} = b \times \sin \gamma,$$

где  $\gamma$  – угол сдвига. При малых углах  $\sin \gamma = \gamma$ .  
В свою очередь угол сдвига равен:

$$\gamma = \frac{\tau}{G},$$

где  $\tau$  – величина касательных напряжений;  
 $G$  – модуль упругости второго рода.

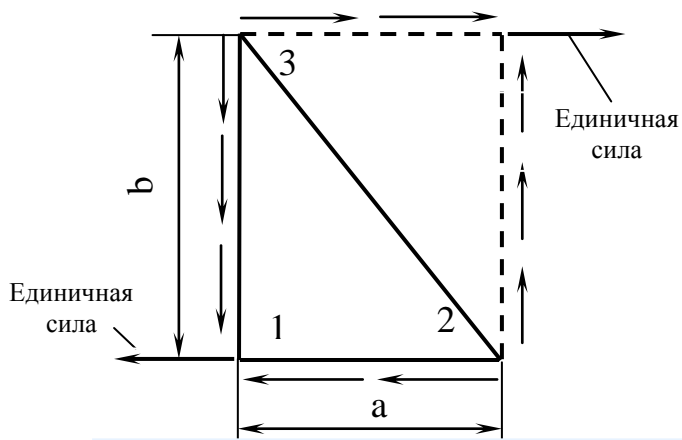


Рисунок 8-Действие касательных напряжений

Величина касательных напряжений

$$\tau = \frac{2}{a \times \delta}.$$

Модуль упругости второго рода равен

$$G = \frac{E}{2 \times (1 + \mu)}.$$

Таким образом

$$\delta_{из,из} = b \times \gamma;$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G};$$

$$\tau = \frac{F}{a \times \delta};$$

$$G = \frac{E}{2 \times (1 + \mu)};$$

$$\beta = \frac{b}{a};$$

$$\gamma = \frac{2 \times 2 \times (1 + \mu)}{a \times \delta \times E};$$

$$\delta_{u3,u3} = \frac{4 \times b \times (1 + \mu)}{a \times}.$$

Окончательное выражение

$$\delta_{u3,u3} = \frac{4 \times b \times (1 + \mu)}{a \times}. \quad (14)$$

Для определения деформации узлов от силы  $F_{v3}$  рассмотрим рис. 9.

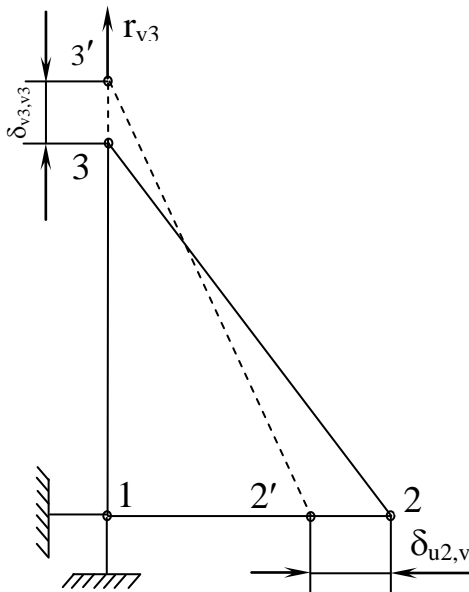


Рисунок 9 - К определению деформации узлов от силы  $F_{v3}$

Дополним данный элемент до прямоугольника. К горизонтальным сторонам приложены растягивающие напряжения (рис. 10).

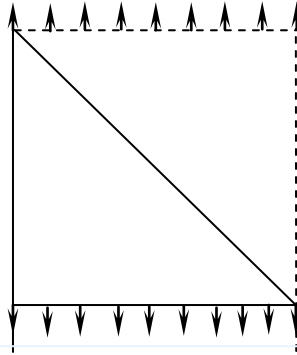


Рисунок 10 - Действие растягивающих напряжений

Деформация  $r_{v3,v3}$  отнесена к абсолютному удлинению  $\Delta l$ . Исходя из этого, имеем

$$\delta_{v3,v3} = \frac{P \times l}{E \times F}.$$

$$l = b; \quad F = a \times \delta; \quad P = 2.$$

$$\delta_{v3,v3} = \frac{2 \times b}{E \times a \times \delta}.$$

Так как  $\beta = \frac{b}{a}$ , имеем

$$\delta_{v3,v3} = \frac{2 \times \beta}{E \times \delta}, \quad (15)$$

Определим деформацию  $\delta_{u2,v3} = -\varepsilon_x \times a$ ,

где  $\varepsilon_x$  – относительное укорочение в направлении оси  $X$ . Знак “-” указывает на то, что укорочение.

В свою очередь

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y \times \mu.$$



$$\varepsilon_y = \frac{2 \times \beta}{E \times \delta \times b}.$$

Тогда

$$\varepsilon_x = \frac{2 \times \beta \times \mu}{E \times \delta \times b}.$$

$$\text{И } \delta_{u2,v3} = -\frac{2 \times \beta \times \mu \times a}{E \times \delta \times b} = -\frac{2 \times b \times \mu \times a}{E \times \delta \times a \times b} = -\frac{2 \times \mu}{E \times \delta}.$$

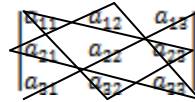
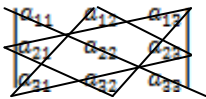
$$\delta_{u2,v3} = -\frac{2 \times \mu}{E \times \delta}.$$

Представим матрицу  $b$ .

$$b = \begin{vmatrix} \frac{2 \times \beta^{-1}}{E \times \delta} & 0 & \frac{-2 \times \mu}{E \times \delta} \\ 0 & \frac{4 \times (1 + \mu) \times \beta}{E \times \delta} & 0 \\ \frac{-2 \times \mu}{E \times \delta} & 0 & \frac{2 \times \beta}{E \times \delta} \end{vmatrix}.$$

5. Получение обратной матрицы  $b^{-1}$

Определитель матрицы находится методом Сарруса.



$$\det b = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

$$\det b = \frac{2\beta^{-1}}{E\delta} \times \frac{4(1+\mu)\beta}{E\delta} \times \frac{2\beta}{E\delta} - \left(-\frac{2\mu}{E\delta}\right) \times \left(-\frac{2\mu}{E\delta}\right) \times \frac{4(1+\mu)}{E\delta}.$$

$$\det b = \frac{16\beta(1+\mu)}{E^3\delta^3} - \frac{16\beta\mu^2(1+\mu)}{E^3\delta^3} = \frac{16\beta(1+\mu)}{E^3\delta^3} \times (1-\mu^2).$$

Алгебраическое дополнение каждого элемента

$$a'_{11} = (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \times (-1)^{1+1}.$$

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a'_{11} = \frac{4(1+\mu)}{E\delta} \times \frac{2\beta}{E\delta} = \frac{8\beta^2(1+\mu)}{E^2\delta^2}.$$

$$a'_{12} = (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \times (-1)^{1+2},$$

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a'_{12} = 0 \times \frac{2\beta}{E\delta} - 0 \times \left(-\frac{2\mu}{E\delta}\right) = 0.$$

$$a'_{13} = (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \times (-1)^{1+3},$$

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a'_{13} = -\left(-\frac{2\mu}{E\delta}\right) \times \frac{4(1+\mu)\beta}{E\delta} = \frac{8\mu\beta(1+\mu)}{E^2\delta^2}.$$

$$a'_{21} = (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) \times (-1)^{2+1},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a'_{21} = 0 \times \frac{2\beta}{E\delta} - 0 \times \left(-\frac{2\mu}{E\delta}\right) = 0.$$

$$a'_{22} = (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) \times (-1)^{2+2},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a'_{22} = \left(\frac{2\beta^{-1}}{E\delta}\right) \times \frac{2\beta}{E\delta} - \left(-\frac{2\mu}{E\delta}\right) \times \left(-\frac{2\mu}{E\delta}\right) =$$

$$= \frac{4}{E^2\delta^2} - \frac{4\mu^2}{E^2\delta^2} = \frac{4}{E^2\delta^2} \times (1 - \mu^2).$$

$$a'_{23} = (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) \times (-1)^{2+2},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a'_{23} = 0 \times \frac{2\beta^{-1}}{E\delta} - 0 \times \left(-\frac{2\mu}{E\delta}\right) = 0.$$

$$a'_{31} = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \times (-1)^{1+3},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a'_{31} = -\left(-\frac{2\mu}{E\delta}\right) \times \frac{4(1+\mu)\beta}{E\delta} = \frac{8\mu\beta(1+\mu)}{E^2\delta^2}.$$

$$a'_{22} = (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \times (-1)^{2+2}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a'_{23} = 0 \times \frac{2\beta^{-1}}{E\delta} - 0 \times \left(-\frac{2\mu}{E\delta}\right) = 0.$$

$$a'_{23} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \times (-1)^{2+3}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a'_{13} = \left(\frac{2\beta^{-1}}{E\delta}\right) \times \frac{4(1+\mu)\beta}{E\delta} = \frac{8(1+\mu)}{E^2\delta^2}.$$

Таким образом, алгебраическое дополнение матрицы  $\mathbf{b}$  следую-

$$\text{щее} \quad \begin{vmatrix} \frac{8\beta^2(1+\mu)}{E^2\delta^2} & 0 & \frac{8\mu\beta(1+\mu)}{E^2\delta^2} \\ 0 & \frac{4}{E^2\delta^2} \times (1-\mu^2) & 0 \\ \frac{8\mu\beta(1+\mu)}{E^2\delta^2} & 0 & \frac{8(1+\mu)}{E^2\delta^2} \end{vmatrix}.$$

Транспонируем полученную матрицу.

Умножим каждый член матрицы на  $\frac{1}{D}$ .

Если  $\det \mathbf{b} = \frac{16\beta(1+\mu)}{E^3\delta^3} \times (1-\mu^2)$ , то

$$\text{То } \frac{1}{\det b} = \frac{\varepsilon^3 \delta^3}{16\beta(1+\mu) \times (1-\mu^2)},$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\mu\beta^2(1+\mu)}{\varepsilon^2 \delta^2} \times \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{16\beta(1+\mu) \times (1-\mu^2)} & 0 & \frac{\mu\beta(1+\mu)}{\varepsilon^2 \delta^2} \times \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{16\beta(1+\mu) \times (1-\mu^2)} \\ 0 & \frac{4}{\varepsilon^2 \delta^2} \times (1-\mu^2) \times \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{16\beta(1+\mu) \times (1-\mu^2)} & 0 \\ \frac{\mu\beta(1+\mu)}{\varepsilon^2 \delta^2} \times \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{16\beta(1+\mu) \times (1-\mu^2)} & 0 & \frac{\mu(1+\mu)}{\varepsilon^2 \delta^2} \times \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{16\beta(1+\mu) \times (1-\mu^2)} \end{vmatrix}$$

После преобразований получаем:

$$\begin{vmatrix} \frac{\beta E \delta}{2(1-\mu^2)} & 0 & \frac{\mu E \delta}{2(1-\mu^2)} \\ 0 & \frac{E \delta}{4\beta(1+\mu)} & 0 \\ \frac{\mu E \delta}{2(1-\mu^2)} & 0 & \frac{E \delta}{2\beta(1-\mu^2)} \end{vmatrix}.$$

Вынесем из данной представленной обратной матрицы множитель

$$\frac{E \delta}{12(1-\mu^2)},$$

Имеем

$$\frac{E \delta}{12(1-\mu^2)} \times \begin{vmatrix} 6\beta & 0 & 6\mu \\ 0 & 3(1-\mu) \times \beta^{-1} & 0 \\ 6\mu & 0 & 6\beta^{-1} \end{vmatrix}.$$

(16)

6. Глобальные матрицы

Имеем два уравнения

$$B \times \bar{S} + A^T \times \bar{Z} = 0; \quad (17)$$

$$A \times \bar{S} + \bar{P} = 0. \quad (18)$$

В уравнении  $B \times \bar{S} + A^T \times \bar{Z} = 0$  произведение  $B \times \bar{S}$  и  $A^T \times \bar{Z}$  представляют собой перемещения от независимых сил. Сумма двух данных перемещений равна нулю. В уравнении  $A \times \bar{S} + \bar{P} = 0$  произведение  $A \times \bar{S}$  обозначает внутренние силы элементы. Сумма, соответственно, внутренних и внешних сил равна нулю.

Решение уравнение  $B \times \bar{S} + A^T \times \bar{Z} = 0$  осуществимо методом перемещений, а решение уравнение  $A \times \bar{S} + \bar{P} = 0$  - методом сил. Наиболее рациональным является использование смешанного метода.

Рассмотрим уравнение  $B \times \bar{S} + A^T \times \bar{Z} = 0$ .

Тогда  $\bar{S} = -\frac{A^T \times \bar{Z}}{B}$ . Или же  $\bar{S} = -A^T \times \bar{Z} \times B^{-1}$ . Полученное значение  $\bar{S}$  подставляем в уравнение метода сил  $A \times \bar{S} + \bar{P} = 0$ .

Имеем

$$-A \times A^T \times B^{-1} \times \bar{Z} + \bar{P} = 0.$$

Или же

$$A \times A^T \times B^{-1} \times \bar{Z} - \bar{P} = 0. \quad (19)$$

Матрица  $A$  представлена в таблице №1. Для заполнения матрицы  $A$  необходимо следующее:

1. Нумерацию узловых точек со схемой исследуемого пласта;
2. Нумерацию треугольников, размещенную в скобках;
3. Матрицу  $a$ ;
4. Треугольник с местной нумерацией.

Схема исследуемого пласта представлена на рис.2. Матрица  $a$  при условии  $\beta = 2$  представлена ниже. Глобальная матрица  $A$  представлена в таблице №1.

$$a = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таблица №1-Матрица А

		S <sub>1</sub>			S <sub>2</sub>			S <sub>3</sub>			S <sub>4</sub>		
		2	3	3	2	3	3	2	3	3	2	3	3
.Т.	1							1	1		1		
	1								2	1		2	
.Т	2												
	2												
.Т	3												
	3												
.Т	4												
	4												
.Т	5												
	5												
.Т	6												
	6												

.Т	7												
	7												
.Т	8												
	8												
.Т	9												
	9												
0 .Т	10												
	10												
1 .Т.	11												
	11												
2 .Т.	12												
	12												

Продолжение таблицы №1-Матрица А

	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$
--	-------	-------	-------	-------



		2	3	3	2	3	3	2	3	3	2	3	3
.T	1												
	1												
.T	2		1		1	1					1		
	2			1		2	1					2	
.T	3	1											
	3		2										
.T	4							1					
	4								2				
.T	5								1				
	5									1			
.T	6												
	6												

.Т	7												
	7												
.Т	8												
	8												
.Т	9												
	9												
0	10												
.Т	10												
1	11												
.Т.	11												
2	12												
.Т.	12												

Продолжение таблицы №2-Матрица А

		S <sub>9</sub>			S <sub>10</sub>			S <sub>11</sub>			S <sub>12</sub>		
		2	3	3	2	3	3	2	3	3	2	3	3
.T.	1												
	1												
.T	2												
	2												
.T	3												
	3												
.T	4												
	4												
.T	5				1			1	1				
	5					2			2	1			
.T	6										1		
	6											2	

.Т	7												
	7												
.Т	8												
	8												
.Т	9												
	9												
0 .Т	10												
	10												
1 .Т.	11												
	11												
2 .Т.	12												
	12												

Продолжение таблицы №3-Матрица А

		$S_{13}$			$S_{14}$			$S_{15}$			$S_{16}$		
		2	3	3	2	3	3	2	3	3	2	3	3
.T.	1												
	1												
.T	2												
	2												
.T	3												
	3												
.T	4												
	4												
.T	5												
	5												
.T	6												
	6												

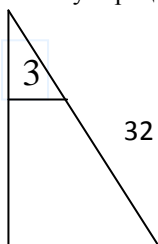
.Т	7				1			1	1				
	7					2			2	1			
.Т	8										1		
	8											2	
.Т	9											1	
	9												1
0	10												
.Т	10												
1	11												
.Т	11												
2	12												
.Т	12												

Продолжение таблицы №4 - Матрица А

		S <sub>17</sub>			S <sub>18</sub>			S <sub>19</sub>			S <sub>20</sub>			
		2	3	3	2	3	3	2	3	3	2	3	3	
.T.	1													a
	1													
.T	2													
	2													
.T	3													a
	3													
.T	4													
	4													
.T	5													
	5													
.T	6													
	6													

.Т	7												
	7												
.Т	8												
	8												
.Т	9				1			1	1				
	9					2			2	1			
0	10									1			
	.Т	10									2		
1	11										1		
	.Т	11										1	
2	12												
	.Т	12											

Треугольник с местной нумерацией представлен на рис.11.





Характерный признак местной нумерации – цифры в прямоугольниках. Крайний правый столбец включает силы от распределенной нагрузки для 1 и 3 узловой точки в направлении оси абсцисс.

Матрица  $A$  представляет собой таблицу со столбцами и со строками. Каждая строка отражает номер узловой точки. Количество соответствует количеству узловых точек. Соответственно нашей схеме нагружения таких строк будет 12. Каждая строка подразделяется на подстроки. Верхняя подстрока учитывает горизонтальное перемещение  $u$ , нижняя подстрока - вертикальное перемещение  $v$ .

Идентификация столбцов осуществляется символом  $S$ , обозначающим независимые силы. Индекс у данного столбца указывает порядковый номер элемента. Например,  $S_{11}$  указывает на независимые силы 11 элемента. Каждый столбец состоит из трех подстолбцов, где представлены перемещения  $u_2, u_3, v_3$  от независимых сил  $r_{u2}, r_{u3}, r_{v3}$ .

Глобальная матрица  $A$  заполняется следующим образом. Например - элемент №16. Вершина треугольника направлена вниз. Значит все значения матрицы «а» будут со знаком «-». Элемент №16 связан с остальным массивом узловыми точками 8, 9, 10. Для данных узловых точек характерно следующее соответствие цифрам местной нумерации: 8-2, 9-3, 10-1. Таким образом для 8 узловой точки характерно следующее:  $\{-1, 0, 0; 0, -2, 0\}^T$ ; для 9 -  $\{0, -1, 0; 0, 0, -1\}^T$ ; для 10 -  $\{1, 1, 0; 0, 2, 1\}^T$ .

Известно уравнение смешанного типа  $A \times B^{-1} \times A^T \times \vec{Z} - \vec{P} = 0$ , с помощью которого при известных значениях нагрузки и сформиро-

ванной матрицы жесткости  $A \times B^{-1} \times A^T$  можно определить перемещения всех искомым узловых точек.

В матрицу жесткости входит глобальная матрица  $B^{-1}$ . Также известно значение матрицы  $b$ , связывающей независимые силы  $\vec{s}$  и перемещения от независимых сил  $\vec{\Delta}$ . Полученные значения обратной матрицы  $b^{-1}$  представлено ниже.

$$b^{-1} = \frac{E\delta}{12(1-\mu^2)} \times \begin{bmatrix} 6\beta & 0 & 6\mu \\ 0 & 3(1-\mu) \times \beta^{-1} & 0 \\ 6\mu & 0 & 6\beta^{-1} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрица  $b^{-1}$  имеет вид:  $3 \times 3$ . Матрица же  $B^{-1}$  в силу своей симметричности имеет уже следующий вид

$$B^{-1} = \frac{E\delta}{12(1-\mu^2)} \times \begin{bmatrix} b_1^{-1} & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & b_n^{-1} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

В данной матрице  $n$  обозначает число элементов исследуемого массива. Для нашего случая  $n = 20$ . С учетом данного показателя матрица  $B^{-1}$  имеет вид:  $60 \times 60$ .

При наличии обобщенных горизонтальных сил, приложенных в узловых точках 1 и 3 в направлении оси X, решение системы алгебраических уравнений в программе Labview дает возможность определить перемещения  $u_i$  и  $v_i$  каждой из 12 узловых точек.

## 7. Вычисление усилий элементарных составляющих

Для вычисления вектора усилий  $\vec{r}_i = [r_{u1}, r_{v1}, r_{u2}, r_{v2}, r_{u3}, r_{v3}]$  для каждого элемента воспользуемся следующим выражением

$$\vec{r}_i = a \times b^{-1} \times a^T \times \begin{bmatrix} u_{1i} \\ v_{1i} \\ u_{2i} \\ v_{2i} \\ u_{3i} \\ v_{3i} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Для вычисления реакций необходимо составить таблицу вектора перемещений для каждого элемента (табл.№2). Для составления таблицы №2 учитываются номера элементов и узловых точек данных элементов, с помощью которых они связаны с массивом. Далее соотносится номер узловой точки с цифрой местной нумерации.

Таблица №2-Для вычисления реакции элементарных составляющих

	№1	№2	№3	№4	№5
$u_1$			$u_1$	$u_2$	$u_4$
$v_1$			$v_1$	$v_2$	$v_4$
$u_2$			$u_2$	$u_1$	$u_3$
$v_2$			$v_2$	$v_1$	$v_3$
$u_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$		$u_2$
$v_3$	$v_1$	$v_2$	$v_3$		$v_2$
	№6	№7	№8	№9	№10
$u_1$	$u_2$	$u_6$	$u_5$		$u_7$
$v_1$	$v_2$	$v_6$	$v_5$		$v_7$
$u_2$	$u_5$	$u_4$	$u_2$		$u_5$
$v_2$	$v_5$	$v_4$	$v_2$		$v_5$
$u_3$	$u_4$	$u_5$		$u_5$	
$v_3$	$v_4$	$v_5$		$v_5$	
	№1 1	№1 2	№13	№1 4	№15
$u_1$	$u_5$	$u_8$		$u_9$	$u_7$
$v_1$	$v_5$	$v_8$		$v_9$	$v_7$
$u_2$	$u_7$	$u_6$		$u_7$	$u_9$
$v_2$	$v_7$	$v_6$		$v_7$	$v_9$
$u_3$	$u_6$	$u_7$	$u_7$		$u_8$
$v_3$	$v_6$	$v_7$	$v_7$		$v_8$
	№1 6	№1 7	№18	№1 9	№20
$u_1$	$u_{10}$		$u_{11}$	$u_9$	$u_{12}$

$v_1$	$v_{10}$		$v_{11}$	$v_9$	$v_{12}$
$u_2$	$u_8$		$u_9$	$u_{11}$	$u_{10}$
$v_2$	$v_8$		$v_9$	$v_{11}$	$v_{10}$
$u_3$	$u_9$	$u_9$		$u_{10}$	$u_{11}$
$v_3$	$v_9$	$v_9$		$v_{10}$	$v_{11}$

### 8. Определение напряжений через независимые реакции

Определим напряжения через независимые реакции.

Абсолютная деформация под действием силы  $r_{u2}$

$$\delta_{u2,u2} = \frac{2\beta^{-1}}{E\delta}.$$

Относительная деформация

$$\varepsilon_{u2,u2} = \frac{2\beta^{-1}}{E\delta\alpha}.$$

Согласно закону Гука  $\sigma = E\varepsilon$ , имеем

$$\sigma = \frac{2\beta^{-1}}{E\delta\alpha} E = \frac{2\alpha}{\delta b\alpha} = \frac{2}{\delta b}. \quad (22)$$

Известно то, что абсолютная деформация под действием силы  $r_{v3}$

$$\delta_{v3,v3} = \frac{2\beta}{E\delta}.$$

Относительная деформация

$$\varepsilon_{v3,v3} = \frac{2\beta}{E\delta b}.$$

Согласно закону Гука, имеем

$$\sigma_{v3} = \frac{2\beta E}{E\delta b} = \frac{2b}{\delta\alpha b} = \frac{2}{\delta\alpha}. \quad (23)$$

Для определения величины касательных напряжений рассмотрим рис.12.

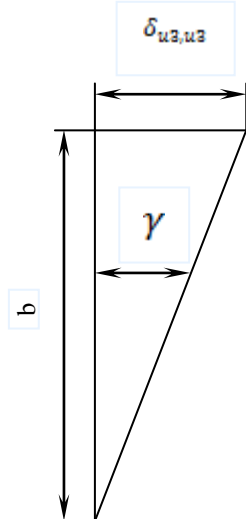


Рисунок 12-К определению величины касательных напряжений

Известно следующее выражение

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

Тогда  $\tau = G\gamma$ .

Из рисунка 11, имеем

$$b\gamma = \delta_{u3, u3}$$

$$\gamma = \frac{\delta_{u3, u3}}{b}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Тогда

$$\delta_{u3, u3} = \frac{4(1 + \mu)\beta}{E\delta}$$

$$\gamma = \frac{4(1 + \mu)\beta}{E\delta b}$$

$$\tau = \frac{4(1 + \mu)\beta E}{E\delta b 2(1 + \mu)} = \frac{2a}{\delta}.$$

Таким образом

$$\tau = \frac{2}{a\delta}. \quad (24)$$

Формула для вычисления напряжений через независимые реакции имеет вид

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\delta b} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{a\delta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{a\delta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_{u2} \\ r_{u3} \\ r_{v2} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

### 9. Направление максимальных напряжений

Траектории напряжений позволяют прогнозировать положение плоскостей скольжения почвы, находящейся под нагрузкой. В связи с тем, что значения  $\sigma_y$ ,  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  постоянно для любого треугольного элемента, то и постоянно будет направление главного напряжения.

Максимальная величина напряжений

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]}. \quad (26)$$

Минимальная величина напряжений

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]}. \quad (27)$$

Направление максимальных напряжений к оси абсцисс

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{2\tau_{yx}}{\sigma_y - \sigma_x} \right). \quad (28)$$

## Литература

1. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. - М.: Высшая школа, 1986. - стр. 446.

2. Александров А.В., Державин Б.П., Смирнов А.Ф. Расчет строительных конструкций с применением электронных машин. - М.: Издательство литературы по строительству, 1967 г. - стр. 142.

№ п/п	Содержание	Стр.
1.	Перемещения узловых точек.....	
2.	Уравнения равновесия.....	
3.	Геометрические уравнения.....	
4.	Физические уравнения.....	
5.	Получение обратной матрицы $b^{-1}$ .....	
6.	Глобальные матрицы.....	
7.	Вычисление усилий элементарных составляющих.....	
8.	Определение напряжений через независимые реакции..	
9.	Направление максимальных напряжений.....	



Учебное издание

Старовойтов Сергей Иванович  
Карпович Анатолий Петрович  
Чемисов Николай Николаевич

**РАСЧЕТ ПЛОСКОНАПРЯЖЕННОЙ ПЛАСТИНЫ  
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Редактор Павлютина И.П.

---

Подписано к печати 00.00.2012 г. Формат 60×84 1/24 Бумага Печатная  
Усл.п.л. 2,38. Тираж 50. Изд.. № 0000.

---

Издательство Брянской государственной сельскохозяйственной академии  
243365 Брянская обл., Выгоничский р-он, с. Кокино, Брянская ГСХА